

Wolken und Wellen

Von der Strömungstheorie zur Wellengleichung

Karsten Kroesch
karsten@kroesch.ch

HB9GKI

25. April 2024

Inhaltsübersicht

Die Historie

Das Wetter

Etwas Vektormathematik

Vektorfelder

Elektromagnetismus und Wellen

Literatur

Geschichtliche Einordnung

Wie entstehen Naturgesetze?



Abbildung 1: Isaac Newton (1643-1727^{greg.})

LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quae ad aequalitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo aequales.

SI negas; fiant ultimo inaequales, & sit earum ultima differentia D . Ergo nequeunt propius ad aequalitatem accedere quam pro data differentia D : contra hypothesin.

LEMMA II.

Si in figura quavis $AacE$, rectis Aa, AE & curva acE comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcumque Ab, Bc, Cd , &c. sub basi- bus AB, BC, CD , &c. aequalibus, & lateribus Bb, Cc, Dd , &c. figurae lateri Aa parallelis contenta; & complantur parallelogramma $aKbl, bLcm, cMdn$, &c. Dein horum parallelogrammorum, latitudo minuatur, & numerus augetur in infinitum: dico quod ultima rationes quas habent ad se invicem figura inscripta

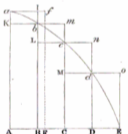
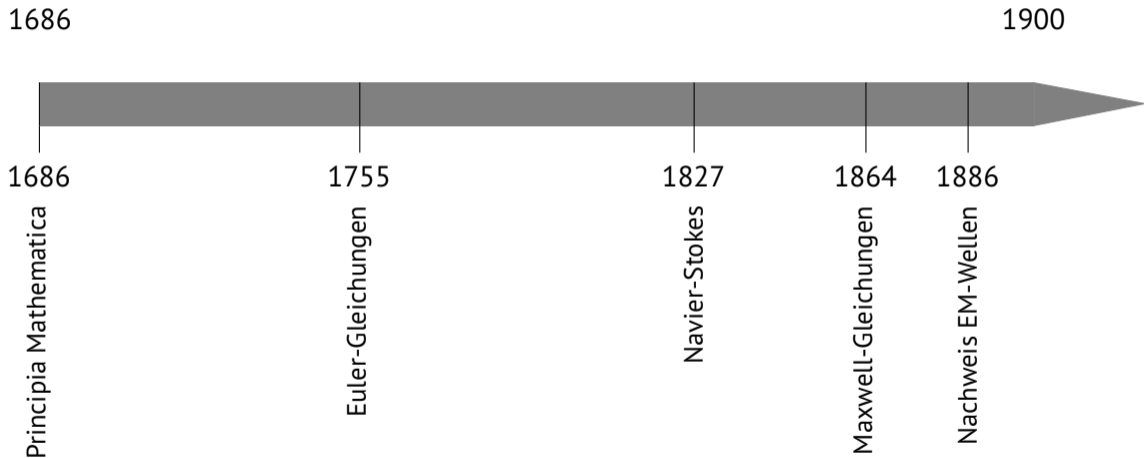
A geometric diagram illustrating Lemma II. It shows a curve acE bounded by a vertical line Aa and a diagonal line AE . A series of vertical lines Ab, Bc, Cd, \dots are drawn from the curve down to the base AR . Horizontal lines Bb, Cc, Dd, \dots are drawn from the intersections on the curve to the vertical line Aa . A series of smaller horizontal lines bl, cm, dn, \dots are drawn from the intersections on the curve to the vertical line Aa , creating a series of nested parallelograms $aKbl, bLcm, cMdn, \dots$ that approximate the area under the curve.

Abbildung 2: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

Geschichtliche Einordnung

Wie entstehen Naturgesetze?



Geschichtliche Einordnung

1686

1900

1777

1851



Ørsted

1791

1867



Faraday

1831

1879



Maxwell

1857

1894



Hertz

Geschichtliche Einordnung

Wie entstehen Naturgesetze?



Abbildung 3: Hans Christian Ørsted



Abbildung 4: Michael Faraday

Geschichtliche Einordnung

Wie entstehen Naturgesetze?

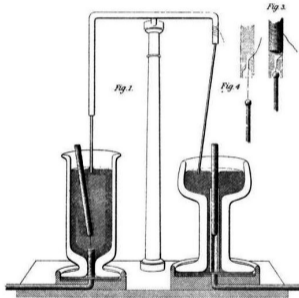


Abbildung 5: Faradays «Magnetische Rotation»

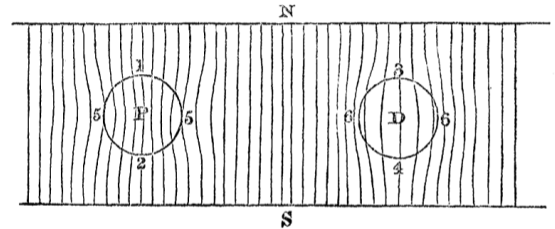
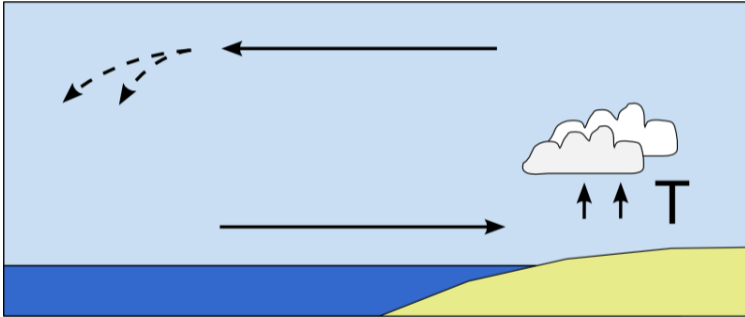


Abbildung 6: Faradays anschauliche Darstellung des Verlaufs der magnetischen Feldlinien in einem paramagnetischen (P) und einem diamagnetischen (D) Körper

Das Wetter

Küstenkonvergenz



Das Wetter

Kontinuitätsgleichung

$$\rho \underbrace{\nabla \cdot v}_{\text{Divergenz}} = 0$$

Das Wetter

Navier-Stokes-Gleichung



Abbildung 7: Claude-Louis Navier (1785-1836)



Abbildung 8: Georges Gabriel Stokes (1819-1903)

Das Wetter

Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - 2\rho\Omega \times \mathbf{v} - \rho g \mathbf{k} + \nabla \cdot \mathbf{J}_t$$

$-\nabla p$	Druckgradientkraft
$2\rho\Omega \times \mathbf{v}$	Corioliskraft
$-\rho g \mathbf{k}$	Schwerkraft
$\nabla \cdot \mathbf{J}_t$	Turbulente Reibungskraft

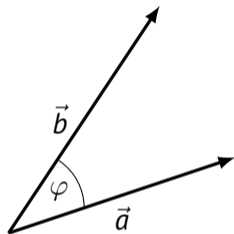
Das Wetter

Zyklon



Abbildung 9: Das Tiefdruckgebiet rotiert

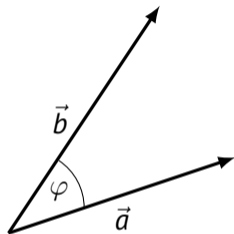
Das Skalarprodukt



$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\end{aligned}$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

Das Skalarprodukt

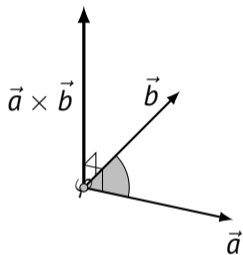


$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\end{aligned}$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

- **Aufgabe** Wie bestimmt man den Betrag eines Vektors im kartesischen Koordinatensystem?

Das Kreuzprodukt



$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

Der Nabla-Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla}v(x_1, \dots, x_n) = \text{grad } v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right)^\top$$

Nabla-Produkte

$$\nabla F = \text{grad}(F)$$

- Der Gradient macht aus dem Skalarfeld ein Vektorfeld.

Nabla-Produkte

$$\nabla \mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{F})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{div}(\mathbf{F})$$

- Der Gradient macht aus dem Skalarfeld ein Vektorfeld.
- Die Divergenz misst die Quelldichte des Vektorfelds.

Nabla-Produkte

$$\nabla \mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{F})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{div}(\mathbf{F})$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{F})$$

- Der Gradient macht aus dem Skalarfeld ein Vektorfeld.
- Die Divergenz misst die Quelldichte des Vektorfelds.
- Die Rotation misst die Wirbeldichte im Vektorfeld.

Felder

Elektrisches Feld

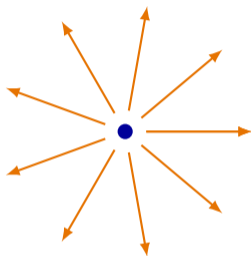


Abbildung 10: Die Ladung ist die Quelle des elektrischen Felds

Felder

Elektrisches Feld

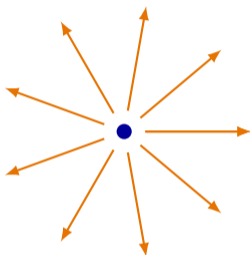


Abbildung 10: Die Ladung ist die Quelle des elektrischen Felds

- **Aufgabe** Wie lautet der Gradient dieses Felds?

Felder

Magnetfeld

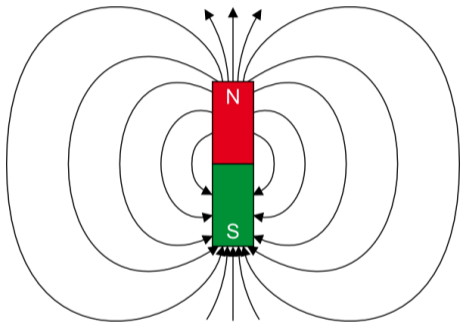


Abbildung 11: Das Magnetfeld ist quellenfrei

Die Maxwell-Gleichungen



Abbildung 12: James Clerk Maxwell (1831-1879)

Die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

Die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

Die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Der Trick

- Können \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder im freien Raum existieren?

Der Trick

- Können \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder im freien Raum existieren?
- Gibt es eine Gleichung, die nur das \mathbf{E} - oder nur das \mathbf{B} -Feld enthält?

Der Trick

- Können \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder im freien Raum existieren?
- Gibt es eine Gleichung, die nur das \mathbf{E} - oder nur das \mathbf{B} -Feld enthält?
- Wir erweitern mit $\nabla \times (3)$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

Eine Rechenregel

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

$$\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{F})) = \text{grad}(\text{div}(\mathbf{F})) - \text{grad}^2(\mathbf{F})$$

Rechnung

Die Wellengleichung

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Die Wellengleichung

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Die Wellengleichung

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

Die Wellengleichung

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

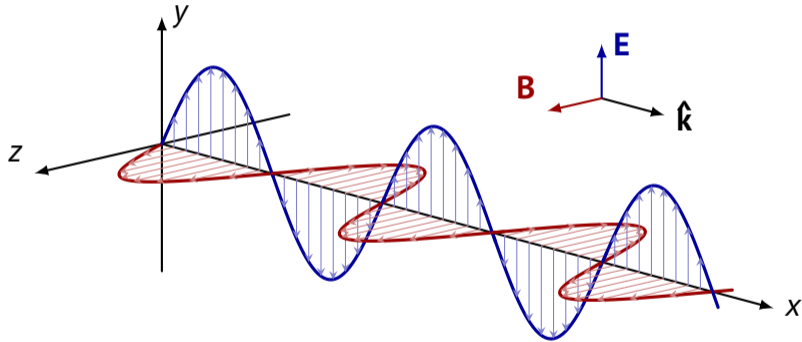
$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Wellen

Die elektromagnetische Welle



Wellenausbreitung im Experiment

Heinrich Hertz 1886



Abbildung 13: Heinrich Hertz

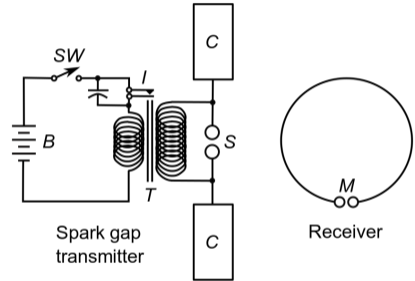
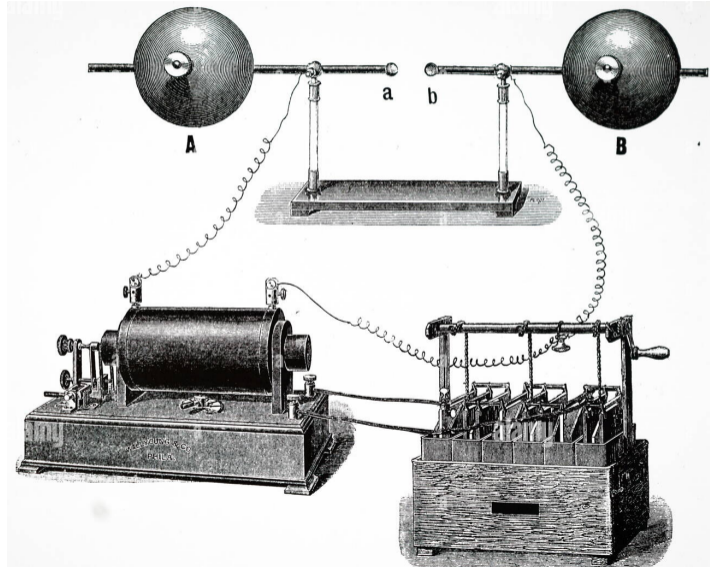


Abbildung 14: Nachweis elektromagnetischer Wellenausbreitung

Wellenausbreitung im Experiment

Heinrich Hertz 1886



Literatur I

- [1] Andreas Bott. *Synoptische Meteorologie*. Springer Spektrum, 2012.
- [2] Michael Faraday. *Historical Sketch of Electro-Magnetism*.
<http://books.google.de/books?id=0BsAAAAAMAAJ&pg=PA274>.
- [3] Richard P. Feynman. *Vorlesungen über Physik*. Oldenbourg, 1991.
- [4] Sir Isaac Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.
<https://books.google.ch/books?id=ShJKAQAAMAAJ>.
- [5] *Wellengleichung*. <https://youtu.be/X8w9Qroft2o>. online; abgerufen 14.9.2022.



<https://hamradio.kroesch.net/>

