Wolken und Wellen

Von der Strömungstheorie zur Wellengleichung

Karsten Kroesch
karsten@kroesch.ch

HB9GKI

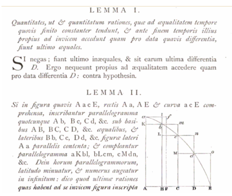
28. September 2022

Inhaltsübersicht

Geschichtliche Einordnung

Wie entstehen Naturgesetze?

Abbildung 1: Isaac Newton (1643-1727$^{greg.}$)



LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo æquales.

SI negas; fiant ultimo inæquales, & sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypothesin.

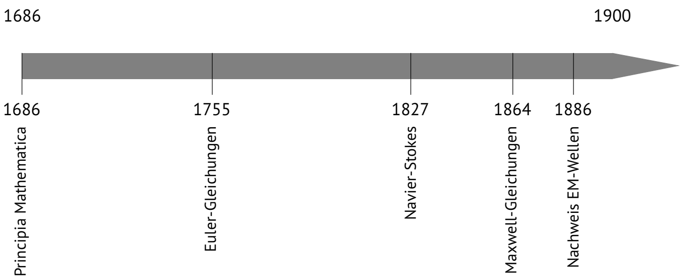
LEMMA II.

Si in figura quavis A a c E, *rectis* A a, A E *& curva* a c E *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunque* A b, B c, C d, &c. *sub basibus* A B, B C, C D, &c. *æqualibus, & lateribus* B b, C c, D d, &c. *figuræ lateri* A a *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* a K b l, b L c m, c M d n, &c. *Dein horum parallelogrammorum, latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta*

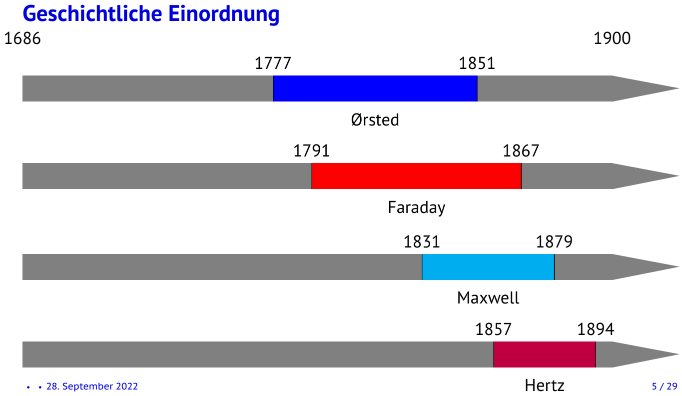
Abbildung 2: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

Geschichtliche Einordnung

Wie entstehen Naturgesetze?



Geschichtliche Einordnung



Geschichtliche Einordnung

Wie entstehen Naturgesetze?

Abbildung 3: Hans Christian Ørsted

Abbildung 4: Michael Faraday

Geschichtliche Einordnung

Wie entstehen Naturgesetze?

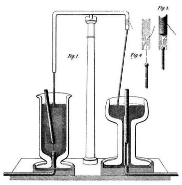


Abbildung 5: Faradays «Magnetische Rotation»

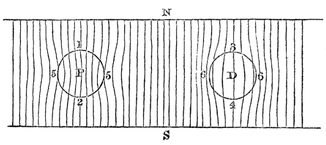
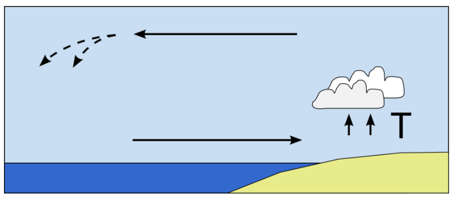


Abbildung 6: Faradays anschauliche Darstellung des Verlaufs der magnetischen Feldlinien in einem paramagnetischen (P) und einem diamagnetischen (D) Körper

Das Wetter

Küstenkonvergenz



Das Wetter
Kontinuitätsgleichung

$$\varrho \underbrace{\nabla \cdot v}_{\text{Divergenz}} = 0$$

Das Wetter
Navier-Stokes-Gleichung

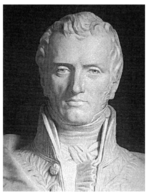


Abbildung 7: Claude-Louis Navier (1785-1836)

Abbildung 8: Georges Gabriel Stokes (1819-1903)

Das Wetter
Navier-Stokes-Gleichung

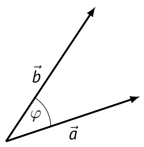
$$\varrho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p - 2\varrho\Omega \times \boldsymbol{v} - \varrho g k + \nabla \cdot \boldsymbol{J_t}$$

$-\nabla p$	Druckgradientkraft
$2\varrho\Omega \times \boldsymbol{v}$	Corioliskraft
$-\varrho g k$	Schwerkraft
$\nabla \cdot \boldsymbol{J_t}$	Turbulente Reibungskraft

Das Wetter
Zyklon

Abbildung 9: Das Tiefdruckgebiet rotiert

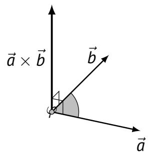
Das Skalarprodukt



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

- **Aufgabe** Wie bestimmt man den Betrag eines Vektors im kartesischen Koordinatensystem?

Das Kreuzprodukt



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\, |\vec{b}|\, \sin \varphi$$

Der Nabla-Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$
$$\vec{\nabla} v(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right)^\top$$

Nabla-Produkte

$$\nabla \boldsymbol{F} = \operatorname{grad}(\boldsymbol{F})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \operatorname{div}(\boldsymbol{F})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{F})$$

- Der Gradient macht aus dem Skalarfeld ein Vektorfeld.
- Die Divergenz misst die Quelldichte des Vektorfelds.
- Die Rotation misst die Wirbeldichte im Vektorfeld.

Felder

Elektrisches Feld

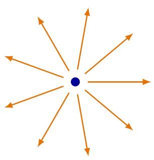


Abbildung 10: Die Ladung ist die Quelle des elektrischen Felds

- **Aufgabe** Wie lautet der Gradient dieses Felds?

Felder

Magnetfeld

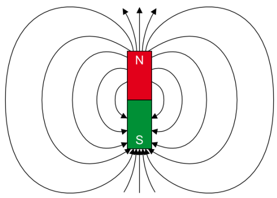


Abbildung 11: Das Magnetfeld ist quellenfrei

Die Maxwell-Gleichungen

Abbildung 12: James Clerk Maxwell (1831-1879)

Die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4}$$

Der Trick

- Können $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Felder im freien Raum existieren?
- Gibt es eine Gleichung, die nur das $\boldsymbol{E}$- oder nur das $\boldsymbol{B}$Feld enthält?
- Wir erweitern mit $\nabla \times (3)$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)$$

Eine Rechenregel

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\boldsymbol{F})) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(\boldsymbol{F}) - \mathrm{grad}^2(\boldsymbol{F})$$

Rechnung

Die Wellengleichung

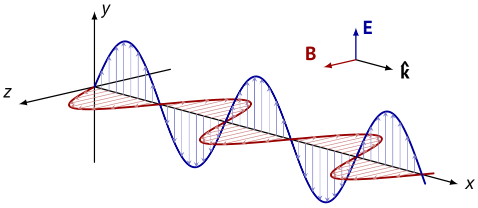
$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \approx 3 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}$$

Wellen
Die elektromagnetische Welle



Wellenausbreitung im Experiment
Heinrich Hertz 1886

Abbildung 13: Heinrich Hertz

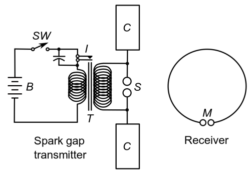
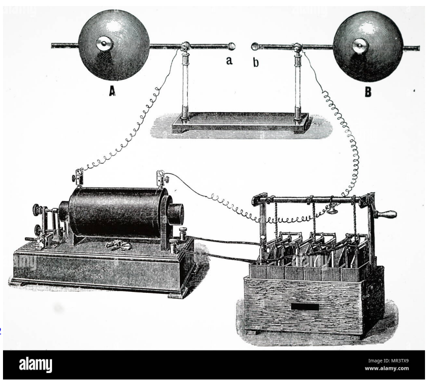


Abbildung 14: Nachweis elektromagnetischer Wellenausbreitung

Wellenausbreitung im Experiment
Heinrich Hertz 1886



Literatur I

[1] Andreas Bott. *Synoptische Meteorologie*. Springer Spektrum, 2012.

[2] Michael Faraday. *Historical Sketch of Electro-Magnetism*. `http://books.google.de/books?id=0BsAAAAAMAAJ&pg=PA274`.

[3] Richard P. Feynman. *Vorlesungen über Physik*. Oldenbourg, 1991.

[4] Sir Isaac Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. `https://books.google.ch/books?id=ShJKAQAAMAAJ`.

[5] *Wellengleichung*. `https://youtu.be/X8w9Qroft2o`. online; abgerufen 14.9.2022.

Danke für Deine Aufmerksamkeit!